受験番号	

1 自然数の 2 乗である数を平方数という．自然数 k に対して $2k-1$ という形の奇数を k 番目の奇数と呼ぶことにする．

(1) n を自然数とする．1 番目から n 番目までの連続する奇数の和 $1+3+\cdots+(2n-1)$ は n^2 に等しいことを示せ．

(2) 自然数 N に対する次の命題 (A),(B),(C) は互いに同値であることを示せ．

(A) N は平方数であるか、2 つの平方数の差に等しい．

(B) N は奇数であるか、4 の倍数である．

(C) N は奇数であるか、(1 番目から始まるとは限らない) 連続する正の奇数の和に等しい．

(3) 連続する正の奇数の和であって 60 に等しいものを全て求めよ．

[解答欄]

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2+n-n=n^2.$

(2) (A)⇒(B): (A) を仮定する．N が平方数ならば、$k=\sqrt{N}$ として、k が奇数ならば N は奇数であり、k が偶数ならば N は 4 の倍数であることが明らか．

ある整数 m,n が存在して $N=m^2-n^2$ が成り立つ場合．$N=(m+n)(m-n)$ となるが、

i) m と n の偶奇が異なるならば、$m\pm n$ はともに奇数であるので N は奇数．

ii) m と n の偶奇が一致するならば、$m\pm n$ はともに偶数であるので N は 4 の倍数．

以上より、(B) が成り立つ．

(B)⇒(C): (B) を仮定する．N が奇数ならば明らかに (C) が成り立つので、N は 4 の倍数であるとする．するとある自然数 M が存在して $N=4M$ と書ける．このとき $N=4M=(2M-1)+(2M+1)$ という連続する奇数の和に表すことができる．よって (C) が成り立つ．

(C)⇒(A): (C) を仮定する．すなわち、ある整数 m,n $(m\geqq n\geqq 1)$ が存在して $N=\displaystyle\sum_{k=n}^{m}(2k-1)$ が成り立つとする．(1) より $N=\displaystyle\sum_{k=n}^{m}(2k-1)=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)-\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=m^2-(n-1)^2$ となる．(ただし $n=1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=0$ としている.) よって (A) が成り立つ．

以上で (A), (B), (C) が互いに同値であることが示された．

(3) 60 が連続する正の奇数の和に表されるための必要十分条件は、前問 (2) より、60 が 2 つの平方数の差で表されることである．60 を素因数分解すると $60=2^2\cdot3\cdot5$ となるので、60 の平方数の差としての表示は $60=2\times30=6\times10$ に対応して $60=16^2-14^2=8^2-2^2$ の 2 つ存在する．

従って 60 の連続する正の奇数の和としての表示は全部で $60=29+31=5+7+9+11+13+15$ の 2 つである．

得点	

受験番号	

2 $a>0$ とする. t を媒介変数とし、

$$x=a\cos 2t,\ y=\frac{1}{\sqrt{a}}\sin 2t \quad (0\leqq t<\pi)$$

で表される曲線を C とする.

(1) 曲線 C を x,y の式で表せ.

(2) 直線 $\ell: y=-\frac{1}{\sqrt{a}}$ を軸とし、曲線 C を ℓ の周りに 1 回転させて出来る立体の体積を求めよ.

[解答欄]

(1) $2t=T$ とおくと、

$$x=a\cos T,\ y=\frac{1}{\sqrt{a}}\sin T \quad (0\leqq T<2\pi).$$

であるので、$-a\leqq x\leqq a,\ -\frac{1}{\sqrt{a}}\leqq y\leqq\frac{1}{\sqrt{a}}$ において、

$$\frac{1}{a^2}x^2+ay^2=\cos^2 T+\sin^2 T=1.$$

従って、曲線 C を表す方程式は、

$$\frac{1}{a^2}x^2+ay^2=1.$$

(2) 曲線 C を y 軸方向に $+\frac{1}{\sqrt{a}}$ 平行移動したものを C' とする. 求める立体の体積は、C' を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積 (V とする) に等しいので、こちらを求めることとする.

曲線 C の $y\geqq 0$ の部分をグラフにもつ関数と、$y<0$ の部分をグラフに持つ関数はそれぞれ、

$$y=\sqrt{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a^2}x^2\right)},\quad y=-\sqrt{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a^2}x^2\right)}$$

(ともに $-a\leqq x\leqq a$) である. よって、C が y 軸に関して対称形であることに注意して、

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\int_0^a \left\{\sqrt{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a^2}x^2\right)}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right\}^2-\left\{-\sqrt{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a^2}x^2\right)}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right\}^2 dx\\ &= 2\pi\int_0^a \frac{4}{a}\sqrt{1-\frac{1}{a^2}x^2}dx\\ &= \frac{8\pi}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx.\end{aligned}$$

この式の積分値は、原点中心・半径 a の円の第 1 象限部分の面積、つまり $\frac{1}{4}a^2\pi$ に等しいので、以下を得る.

$$V=2\pi^2.$$

得点	