数　　学

氏名	

受験番号	

1 　3 つの袋 A，B，C それぞれに，1 から 30 までの番号を 1 つずつ書いた 30 枚のカードが入っている。A，B，C の袋からカードを 1 枚ずつ取り出す。全部で 30^3 通りのすべての取り出し方について考える。このとき，取り出した 3 枚のカードの番号を，X，Y，Z $(X \leqq Y \leqq Z)$ とする。たとえば，A，B，C の袋から，それぞれ 24，16，24 を取り出したとき，$X = 16$，$Y = Z = 24$ である。

(1) Z が 10 以下となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

(2) Y が 12 となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

(3) Y が 12 で，X，Y，Z が等比数列となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか。

[解答欄]

(1) すべての袋から 10 以下のカードを引く場合の数と等しいので，$10^3 = 1000$　　答　1000 通り

(2) Y が 12 となるのは次のどれかの場合

(a) 3 枚のカードがすべて 12

(b) 3 枚のカードのうち 2 枚が 12

(c) X が 1〜11，Y が 12，Z が 13〜30

カードの引き方 30^3 通りのうち

(a) は 1 通り

(b) は $3 \times 29 = 87$ 通り

(c) は $3! \times 11 \times 18 = 1188$ 通り

よって，求める取り出し方を数えると，$1 + 87 + 1188 = 1276$　　答　1276 通り

(3) $X, 12, Z$ は等比数列 $\iff \dfrac{12}{X} = \dfrac{Z}{12} \iff 12^2 = XZ \iff 2^4 \cdot 3^2 = XZ$

これを満たす $X \leqq 12 \leqq Z$ の組は，$(6, 12, 24)$, $(8, 12, 18)$ $(9, 12, 16)$, $(12, 12, 12)$

よって，求める取り出し方を数えると，$3! \times 3 + 1 = 19$　　答　19 通り

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

$\boxed{2}$ 座標平面上で，不等式 $\dfrac{2^{x+1}}{3^{y-1}}+\dfrac{3^{y-1}}{2^x}\leqq 3$ を満たす点 $(x,\,y)$ 全体の集合を D とする。

(1) 点 $(\log_2 3,\,\log_3 9)$ は D に属することを示せ。

(2) 不等式 $t-3+\dfrac{2}{t}\leqq 0$ を満たす正の実数 t の範囲を求めよ。

(3) D を図示せよ。

[解答欄]

(1) $\dfrac{2^{\log_2 3+1}}{3^{\log_3 9-1}}+\dfrac{3^{\log_3 9-1}}{2^{\log_2 3}}=\dfrac{3\cdot 2}{3^{2-1}}+\dfrac{9\cdot 3^{-1}}{3}=3$ より

(2) 正の実数 t に対して $f(t):=t-3+\dfrac{2}{t}$ とおくと，$f(t)=\dfrac{1}{t}(t^2-3t+2)=\dfrac{1}{t}(t-1)(t-2)$

$t>0$ かつ $f(t)\leqq 0 \iff t>0$ かつ $(t-1)(t-2)\leqq 0 \iff 1\leqq t\leqq 2$　　答　$1\leqq t\leqq 2$

(3) $t:=\dfrac{2^{x+1}}{3^{y-1}}$ とおくと，$t>0$

$\dfrac{2^{x+1}}{3^{y-1}}+\dfrac{3^{y-1}}{2^x}-3=t+\dfrac{2}{t}-3=f(t)$ なので，小問 (2) の解より

$$\begin{aligned}\frac{2^{x+1}}{3^{y-1}}+\frac{3^{y-1}}{2^x}\leqq 3 &\iff f(t)\leqq 0\\ &\iff 1\leqq t\leqq 2\\ &\iff 1\leqq \frac{2^{x+1}}{3^{y-1}}\leqq 2\\ &\iff 3^{y-1}\leqq 2^{x+2}\leqq 2\cdot 3^{y-1}\end{aligned}$$

ここで 3 を底とする対数をとると

$$\begin{aligned}3^{y-1}\leq 2^{x+1}\leqq 2\cdot 3^{y-1} &\iff \log_3 3^{y-1}\leq \log_3 2^{x+1}\leqq \log_3(2\cdot 3^{y-1})\\ &\iff y-1\leqq (x+1)\log_3 2\leqq \log_3 2+(y-1)\\ &\iff y\leqq x\log_3 2+1+\log_3 2 \text{ かつ } y\geqq x\log_3 2+1\end{aligned}$$

よって，$k:=\log_3 2$ とおくと，D は 2 直線 $y=kx+1$ と $y=kx+1+k$ で挟まれた部分ただし，境界線を含む　　[図は省略]

得点	

数　　　学

氏 名	

受験番号	

3 座標空間の 6 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 2), D(2, 0, 2), E(0, 2, 2) を頂点とする三角柱 OAB−CDE がある。この三角柱の辺 OC 上の動点を P とし，$\angle \mathrm{OBP} = \theta$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ)$ とする。3 点 P，A，B を通る平面で三角柱を切ったとき，切り口の図形の面積を $S(\theta)$ とする。

(1) $S(45^\circ)$ を求めよ。

(2) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$S(\theta)$ を求めよ。

[解答欄]

(1) $\theta = 45^\circ$ のとき $\mathrm{P} = \mathrm{C}$ で，切り口の図形は１辺の長さが $\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ の正三角形 CAB

よって，$S(45^\circ) = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{8} \times \left(\sqrt{8}\sin 60^\circ\right) = 2\sqrt{3}$　　答　$S(45^\circ) = 2\sqrt{3}$

(2) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，切り口の図形は $\mathrm{PA} = \mathrm{PB} = \dfrac{2}{\cos\theta}$ の二等辺三角形 PAB

よって，$S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{\left(\dfrac{2}{\cos\theta}\right)^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{4 - 2\cos^2\theta}}{\cos\theta}$

ここで，$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ より

$S(\theta) = \sqrt{2} \times \sqrt{4 - \dfrac{4}{3}} \times \sqrt{\dfrac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$　　答　$S(\theta) = 2\sqrt{2}$

得点	

数　学

氏名	

受験番号	

$\boxed{4}$ a，b を実数の定数とする。座標平面において，$y=x^3+ax^2+2bx$ で表される曲線を C とする。点 $\mathrm{A}(1,-6)$ は C 上にあり，点 A における C の接線を ℓ とするとき，ℓ の傾きは -5 である。$f(x)=x^3+ax^2+2bx$ とおき，ℓ の方程式を $y=g(x)$ とする。

(1) a と b の値を求めよ。

(2) $f(x)-g(x)$ を因数分解せよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{0}|f(x)-g(x)|\,dx$ を求めよ。

[解答欄]

(1) C は点 $\mathrm{A}(1,-6)$ を通るから，$1+a+2b=-6$

ℓ の傾きは -5 で，$f'(x)=3x^2+2ax+2b$ なので，$f'(1)=3+2a+2b=-5$

よって，連立方程式 $a+2b=-7,\ 2a+2b=-8$ を解いて，$a=-1,\ b=-3$　　答　$a=-1,\ b=-3$

(2) $f(x)=x^3-x^2-6x$ であり，ℓ の方程式は $y-(-6)=-5(x-1)$ なので $g(x)=-5x-1$

よって，$f(x)-g(x)=x^3-x^2-6x-(-5x-1)=x^3-x^2-x+1$

$f(1)-g(1)=0$ より，$f(x)-g(x)$ は $x-1$ を因数にもつ

$f(x)-g(x)$ を $x-1$ で割ると $(x-1)(x^2-1)$ となり，$x^2-1=(x-1)(x+1)$ なので

$f(x)-g(x)=(x-1)^2(x+1)$　　答　$f(x)-g(x)=(x-1)^2(x+1)$

(3) 小問 (2) の解より，$-2\leqq x\leqq -1$ において $f(x)-g(x)\leqq 0$，$-1\leqq x\leqq 0$ において $f(x)-g(x)\geqq 0$ なので

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0}|f(x)-g(x)|\,dx &= \int_{-2}^{-1}(g(x)-f(x))\,dx+\int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))\,dx \\
&= -\int_{-2}^{-1}(x^3-x^2-x+1)dx+\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-x+1)dx \\
&= -\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0} \\
&= \left(\frac{(-2)^4}{4}-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}+(-2)\right)-2\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right) \\
&= \left(4+\frac{8}{3}-2-2\right)-2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right) \\
&= \frac{8}{3}-2\cdot\left(-\frac{11}{12}\right) \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

答　$\dfrac{9}{2}$

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

5　複素数平面上で，点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき， $w = 2 - iz$ で表される点 w の描く図形を C とする。また，$a = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$b = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$，$b = \cos\beta + i\sin\beta$ を満たす実数 α と β を求めよ。ただし，$0 \leqq \alpha < 2\pi$，$0 \leqq \beta < 2\pi$ とする。

(2) C を複素数平面上に図示せよ。

(3) $a^n = 2 - i\,b^n$ を満たす自然数 n のうち，最小のものを求めよ。

[解答欄]

(1) $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}$ より $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4}$ より $\beta = \dfrac{\pi}{4}$　　答　$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$，$\beta = \dfrac{\pi}{4}$

(2) $w = -2 + iz \iff z = -i(w+2)$ より

$|z| = 1 \iff |-i(w+2)| = 1$

$\iff |-i|\cdot|w+2| = 1$

$\iff |w+2| = 1$

よって，C は点 -2 中心，半径 1 の円　　[図は省略]

(3) $|b^n| = |b|^n = 1$ なので，小問 (2) の解より，$2 - ib^n$ は点 2 中心，半径 1 の円周上にある

一方，a^n は点 0 中心，半径 1 の円周上にあり，これら 2 つの円は点 1 のみを共有するので

$a^n = 2 - ib^n = 1$ を満たす自然数 n のうち，最小のものを求めればよい

$a^n = 1 \iff \cos\left(\dfrac{n}{3}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{n}{3}\pi\right) = 1$ より，n は 6 の倍数

$2 - ib^n = 1 \iff b^n = -i \iff \cos\left(\dfrac{n}{4}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{n}{4}\pi\right) = \cos\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$ より

$\dfrac{n}{4} = \dfrac{3}{2} + 2k$（$k$ は 0 以上の正数），すなわち，$n = 6 + 8k$（k は 0 以上の正数）

これが 6 の倍数となる最小の k は 0

よって，$n = 6$　　答　$n = 6$

得点	