数　学

氏名	
受験番号	

解答は，最後の答えだけを書くのではなく，その答えを導き出した過程がわかるように式・説明なども書いてください。

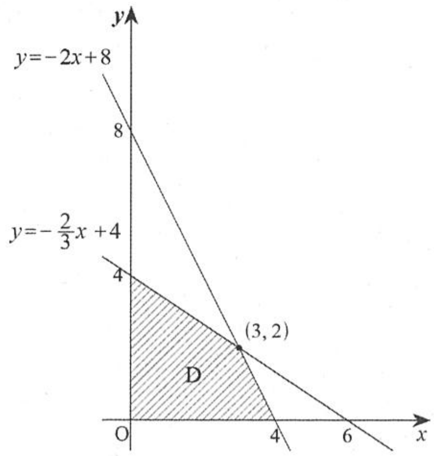
問 1　次の 4 つの不等式，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y \leqq 8$，$2x+3y \leqq 12$ を同時に満たす領域を D とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 領域 D を座標平面上に図示せよ。

(2) 点 $P(x, y)$ が領域 D を動くとき，$ax+y$ のとる値の最大値を a を用いて表せ。ただし，a は $0<a<3$ を満たす定数とする。

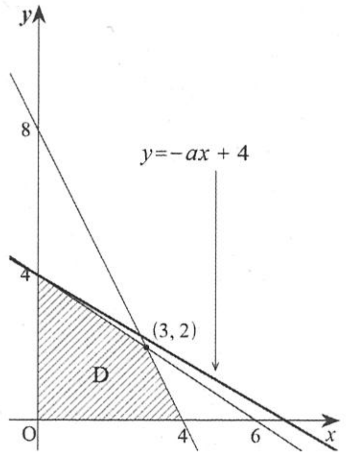
[解答例]

(1) $2x+y \leqq 8$ より $y \leqq -2x+8$ となり，
$2x+3y \leqq 12$ より $y \leqq -\frac{2}{3}x+4$ となる。
これらと $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を同時に満たす領域 D は右の図の斜線で示した領域であり，境界を含む。



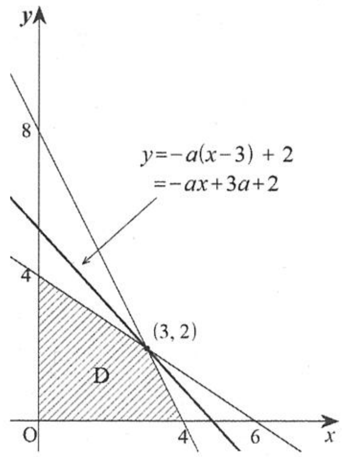
(2) $ax+y=k$ とおくと，$y=-ax+k$ となるから，領域 D と交わるような傾きが $-a$ の直線の中で y 切片が最大となるものを求めればよい。

[i] $0<a \leqq \frac{2}{3}$ のとき



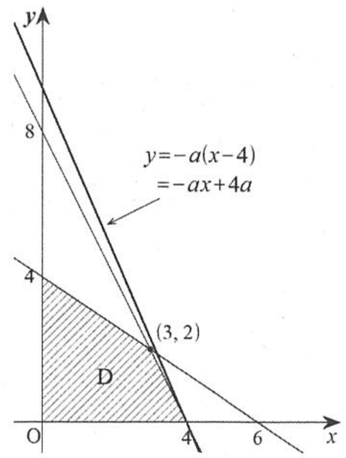
直線が点 $(0, 4)$ を通るときに y 切片が最大

[ii] $\frac{2}{3}<a \leqq 2$ のとき



直線が点 $(3, 2)$ を通るときに y 切片が最大

[iii] $2<a<3$ のとき



直線が点 $(4, 0)$ を通るときに y 切片が最大

以上より，[i]〜[iii] をまとめると，$ax+y$ のとる値の最大値は，

$$\begin{cases} 0<a \leqq \frac{2}{3} \text{ のとき } & 4, \\ \frac{2}{3}<a \leqq 2 \text{ のとき } & 3a+2, \\ 2<a<3 \text{ のとき } & 4a, \end{cases}$$

となる。

得点	

数　学

氏名	
受験番号	

解答は，最後の答えだけを書くのではなく，その答えを導き出した過程がわかるように式・説明なども書いてください。

問２　10 個の数字 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 の中から重複なく 3 個使ってできる 3 桁の整数全体の集合を A とする。例えば，123 や 750 は集合 A に属するが，424 や 036 は集合 A に属さない。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 集合 A に属する数字の個数を求めよ。

(2) 集合 A に属する 5 の倍数の個数を求めよ。

(3) 集合 A に属する数字の中で 100 番目に小さいものを求めよ。

[解答例]

(1) 3 桁の整数「XYZ」について，X の取り方は 0 を除く 9 通り，Y の取り方は 9 通り，Z の取り方は 8 通りとなる。よって求めたい数字の個数は $9 \times 9 \times 8 = 648$ である。

(2) 3 桁の整数「XYZ」について，Z は 0 か 5 となるので,「XY0」か「XY5」となる数字の個数を求めればよい。「XY0」の形の数字について，X の取り方は 9 通り，Y の取り方は 8 通りなので個数は 72 である。「XY5」の形の数字について，X の取り方は 0 を除く 8 通り，Y の取り方は 8 通りなので個数は 64 である。よって求めたい個数は $72+64 = 136$ である。

(3) 集合 A に属する数字のうち小さいものから順に考えていく。「1YZ」の形となる数字の個数は $9 \times 8 = 72$ である。よって,「2YZ」の形となる数字のうち 28 番目に小さいものを求めればよい。「20Z」,「21Z」,「23Z」の形となるものの個数はそれぞれ 8 である。よって,「24Z」の形の数字で 4 番目に小さいものを求めればよく，そのようにして小さい順に並べると 240, 241, 243, 245, ... となる。よって求める数字は 245 である。

得点	